Egzamin z Analizy Matematycznej I.2 2022/23 (drugi termin)
31 sierpnia 2023, 10:00

Za rozwiązanie każdego z zadań 1-5 można uzyskać 10 punktów. Należy wybrać dowolne cztery zadania z podanego zestawu.
Rozwiązanie każdego zadania należy oddać **na osobnej kartce, podpisanej** *swoim imieniem i nazwiskiem, numerem indeksu, a także nazwiskiem prowadzącego ćwiczenia lub numerem grupy ćwiczeniowej.*
Rozwiązania **należy szczegółowo uzasadnić**, *powołując się na fakty znane z wykładu bądź z ćwiczeń.*

Zadanie 1. Wykaż, że wzór

$$F(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(nx^2 + x)}{2^n}$$

określa poprawnie funkcję $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ oraz:

(a) udowodnij, że F jest ciągła;

(b) zbadaj w jakich punktach $\mathbb{R}$ funkcja F jest różniczkowalna i oblicz $F'(0)$, jeśli istnieje.

Zadanie 2. Funkcja $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą. Wykaż, że

$$g(0) = \lim_{x \to 0^+} x \cdot \int_x^1 \frac{g(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Zadanie 3. Oblicz granicę

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^5}{(n^2 + k^2)^3}.$$

Zadanie 4. Zbadaj zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_1^\infty \left(\frac{x}{\ln x}\right)^\alpha \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^{4\alpha}}$$

w zależności od parametru $\alpha \in \mathbb{R}$.

Zadanie 5. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie ustaloną funkcją ciągłą. Dla $n \in \mathbb{N}$ oraz dla $x \in \mathbb{R}$ zdefiniujmy

$$f_n(x) = \frac{n}{2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

(a) Udowodnij, że $(f_n)_n$ zbiega punktowo do f dla $x \in \mathbb{R}$.

(b) Udowodnij, że $(f_n)_n$ zbiega jednostajnie do f na przedziale $[-1, 1]$.